第２講　指数関数・対数関数

1　c を正の定数として，不等式

$$x^{\log_3 x} \geqq \left(\frac{x}{c}\right)^3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を考える。

3 を底とする①の両辺の対数をとり，$t=\log_3 x$ とおくと

$$t^{\boxed{ア}}-\boxed{イ}\,t+\boxed{イ}\,\log_3 c \geqq 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という。

$c=\sqrt[3]{9}$ のとき，①を満たす x の値の範囲を求めよう。②により

$t \leqq \boxed{ウ}$，$t \geqq \boxed{エ}$

である。さらに，真数の条件を考えて

$\boxed{オ} < x \leqq \boxed{カ}$，$x \geqq \boxed{キ}$

となる。

（次ページに続く。）

次に，①が $x>$ [オ] の範囲でつねに成り立つような c の値の範囲を求めよう。

x が $x>$ [オ] の範囲を動くとき，t のとり得る値の範囲は [ク] である。

[ク] に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪　正の実数全体　　①　負の実数全体
②　実数全体　　③　1 以外の実数全体

この範囲の t に対して，②がつねに成り立つための必要十分条件は，$\log_3 c \geqq \dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ である。すなわち，$c \geqq \sqrt[\boxed{サ}]{\boxed{シス}}$ である。

2　関数 $y=-2^{2x}+2^{x+4}-48$ について考える。

(1)　$t=2^x$ とおく。y を t の式で表すと

$$y=\boxed{ア}\left(t-\boxed{イ}\right)^2+\boxed{ウエ}$$

となる。

$x=1$ のとき，$y=\boxed{オカキ}$ である。$x\geqq 1$ のとき，y は $x=\boxed{ク}$ で最大値 $\boxed{ケコ}$ をとる。

(2)　$k>1$ とする。x が $1\leqq x\leqq k$ の範囲を動くとき，y の最小値が $\boxed{オカキ}$ であるような k の値の範囲は

$$1<k\leqq \log_2\boxed{サシ}$$

である。この範囲に含まれる最大の整数の値は $\boxed{ス}$ である。

（次ページに続く。）

(3)　$y=0$ を満たす x は二つある。そのうちの小さい方は **セ** である。また，大きい方は **ソ** を満たす。**ソ** に当てはまるものを，次の⓪～⑨のうちから一つ選べ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

⓪　$1<x<1.2$　　①　$1.2<x<1.3$　　②　$1.5<x<1.6$
③　$2.4<x<2.5$　　④　$2.5<x<2.6$　　⑤　$2.6<x<2.8$
⑥　$3.5<x<3.6$　　⑦　$3.6<x<3.8$　　⑧　$4.2<x<4.4$
⑨　$x>10$

3

(1)　$\log_{10}10 =$ **ア** である。また，$\log_{10}5$，$\log_{10}15$ をそれぞれ $\log_{10}2$ と $\log_{10}3$ を用いて表すと

$\log_{10}5 =$ **イ** $\log_{10}2 +$ **ウ**

$\log_{10}15 =$ **エ** $\log_{10}2 + \log_{10}3 +$ **オ**

となる。

（次ページに続く。）

(2)　太郎さんと花子さんは，15^{20} について話している。
以下では，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

太郎：15^{20} は何桁の数だろう。
花子：15 の 20 乗を求めるのは大変だね。$\log_{10}15^{20}$ の整数部分に着目してみようよ。

$\log_{10}15^{20}$ は

$$\boxed{カキ}<\log_{10}15^{20}<\boxed{カキ}+1$$

を満たす。よって，15^{20} は $\boxed{クケ}$ 桁の数である。

太郎：15^{20} の最高位の数字も知りたいね。だけど，$\log_{10}15^{20}$ の整数部分にだけ着目してもわからないな。
花子：$N\cdot 10^{\boxed{カキ}}<15^{20}<(N+1)\cdot 10^{\boxed{カキ}}$ を満たすような正の整数 N に着目してみたらどうかな。

$\log_{10}15^{20}$ の小数部分は $\log_{10}15^{20}-\boxed{カキ}$ であり

$$\log_{10}\boxed{コ}<\log_{10}15^{20}-\boxed{カキ}<\log_{10}\left(\boxed{コ}+1\right)$$

が成り立つので，15^{20} の最高位の数字は $\boxed{サ}$ である。

第２講　指数関数・対数関数

1　$x^{\log_3 x} \geqq \left(\dfrac{x}{c}\right)^3$　$(c>0)$　……①

①の真数条件より $x>0$ であるから，①の両辺はともに正である。

よって，3 を底とする①の両辺の対数をとると

$$\log_3 x^{\log_3 x} \geqq \log_3 \left(\frac{x}{c}\right)^3$$

$$(\log_3 x)(\log_3 x) \geqq 3\log_3 \frac{x}{c}$$

$$(\log_3 x)^2 \geqq 3(\log_3 x - \log_3 c)$$

$t=\log_3 x$ とおくと

$t^2 \geqq 3(t-\log_3 c)$　よって，$t^2-3t+3\log_3 c \geqq 0$　……②

$c=\sqrt[3]{9}=(3^2)^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{3}}$ のとき，$3\log_3 c=3\log_3 3^{\frac{2}{3}}=3\times\dfrac{2}{3}=2$ より，②は

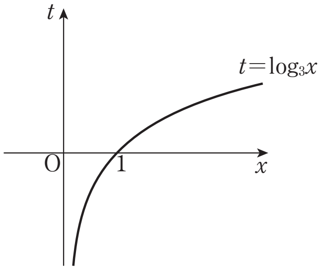
$t^2-3t+2 \geqq 0$　　$(t-1)(t-2) \geqq 0$　　よって，$t \leqq 1$，$t \geqq 2$

つまり，$\log_3 x \leqq 1$，$\log_3 x \geqq 2$ より，$x \leqq 3$，$x \geqq 9$

これと，真数条件 $x>0$ より，$0<x\leqq 3$，$x \geqq 9$

次に，①が $x>0$ の範囲でつねに成り立つような c の値の範囲を求める。

x が $x>0$ の範囲を動くとき，$t=\log_3 x$ のとり得る値の範囲は実数全体（②）である。



$$(\text{②の左辺})=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+3\log_3 c$$

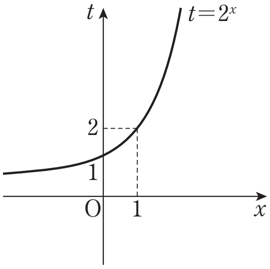
であるから，すべての実数 t で②がつねに成り立つための必要十分条件は

$-\dfrac{9}{4}+3\log_3 c \geqq 0$　つまり　$\log_3 c \geqq \dfrac{3}{4}$ である。

すなわち，$c \geqq 3^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{27}$ である。

2　(1)　$t=2^x$ とおくと

$$\begin{aligned} y &= -2^{2x}+2^{x+4}-48 \\ &= -(2^x)^2+2^4\cdot 2^x-48 \\ &= -t^2+16t-48 \\ &= -(t-8)^2+16 \end{aligned}$$



$x=1$ のとき，$t=2^1=2$　より

$y=-(2-8)^2+16=-20$

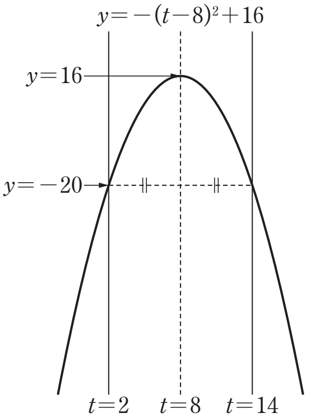
$x \geqq 1$ のとき，$t \geqq 2$ であるから，y は $t=8$，つまり $x=3$ で最大値 16 をとる。

(2)　x が $1 \leqq x \leqq k\ (k>1)$ の範囲を動くとき，t は $2 \leqq t \leqq 2^k$ の範囲を動く。このとき，y の最小値が -20 であるような k の値の範囲は

$2^1 < 2^k \leqq 14$ より　$1 < k \leqq \log_2 14$

ここで，$\log_2 8 < \log_2 14 < \log_2 16$ より，$3 < \log_2 14 < 4$

よって，$1 < k \leqq \log_2 14$ に含まれる最大の整数の値は 3 である。



(3)　$y=0$ のとき

$-(t-8)^2+16=0$　　　$(t-8)^2=16$

$t-8=\pm 4$　　　$t=4,\ 12$

よって，$y=0$ を満たす x は $2^x=4$，$2^x=12$ を満たす x である。

そのうち小さい方は $x=2$ である。

また，大きい方は

$$x=\log_2 12=\log_2 (2^2\cdot 3)=2+\log_2 3$$

$$=2+\frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$$

$$=2+\frac{0.4771}{0.3010}=2+1.585\cdots\cdots=3.585\cdots\cdots$$

よって，大きい方は $3.5 < x < 3.6$（⑥）を満たす。

3　(1)　$\log_{10} 10=1$

$$\log_{10} 5=\log_{10}\frac{10}{2}=\log_{10} 10-\log_{10} 2=-\log_{10} 2+1$$

$$\log_{10} 15=\log_{10}(3\cdot 5)=\log_{10} 3+\log_{10} 5=-\log_{10} 2+\log_{10} 3+1$$

(2)　$\log_{10} 15^{20}=20\log_{10} 15=20(-\log_{10} 2+\log_{10} 3+1)=20(-0.3010+0.4771+1)$

$=20\times 1.1761=23.522$

したがって，$\log_{10} 15^{20}$ は $23 < \log_{10} 15^{20} < 23+1$ を満たす。

よって，$10^{23} < 15^{20} < 10^{24}$ より，15^{20} は 24 桁の数である。

$\log_{10} 15^{20}$ の小数部分は $\log_{10} 15^{20}-23=0.522$ であり，

$\log_{10} 3=0.4771$

$\log_{10} 4=\log_{10} 2^2=2\log_{10} 2=2\times 0.3010=0.6020$ より，

$\log_{10} 3 < \log_{10} 15^{20}-23 < \log_{10}(3+1)$

よって，$\log_{10} 3+23 < \log_{10} 15^{20} < \log_{10} 4+23$

$\log_{10} 3+\log_{10} 10^{23} < \log_{10} 15^{20} < \log_{10} 4+\log_{10} 10^{23}$

$\log_{10} 3\cdot 10^{23} < \log_{10} 15^{20} < \log_{10} 4\cdot 10^{23}$

したがって，$3\cdot 10^{23} < 15^{20} < 4\cdot 10^{23}$

ゆえに，15^{20} の最高位の数字は 3 である。